



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com



International Journal of Thermal Sciences 42 (2003) 425–433

International
Journal of
Thermal
Sciences

www.elsevier.com/locate/ijts

Étude numérique du transfert de chaleur entre l'air et un film mince ostwaldien ruisselant en régime laminaire permanent sur une surface plane inclinée isotherme

Numerical study of heat transfer between air and a falling ostwaldian film in permanent laminar regime on an isotherm inclined surface

Ahmed Benkhald ^a, Salah Saouli ^b, Cheikh Mbow ^c, Michel Daguinet ^{a,*}

^a *Laboratoire de thermodynamique et énergétique, Université de Perpignan, 52, avenue de Villeneuve, 66860 Perpignan cedex, France*

^b *Laboratoire de valorisation et promotion des ressources sahariennes, Faculté des sciences et des sciences de l'ingénieur, Université de Ouargla, Route de Ghardaia, 30000 Ouargla, Algérie*

^c *Faculté des sciences, Université Cheikh Auta Diop, Dakar, Sénégal*

Reçu le 4 avril 2001 ; accepté le 19 avril 2002

Résumé

Les auteurs étudient les écoulements du liquide et de l'air qu'il entraîne ainsi que le transfert de chaleur entre ce dernier et la surface, en régimes établi et non établi permanents. Ils admettent les hypothèses de la couche limite bidimensionnelle laminaire dans le liquide et le gaz. Ils considèrent d'une part, qu'au niveau du bord d'entrée de la surface la vitesse longitudinale du liquide ne dépend que de la coordonnée normale à la paroi et d'autre part, que loin de l'interface l'air est au repos. Une transformation homotopique leur permet de ramener l'interface à une surface parallèle à la paroi et d'éviter, lors de la discrétisation des équations, un maillage à pas variable. Ils définissent la viscosité apparente du liquide ostwaldien à l'aide de la valeur absolue du gradient normal de la vitesse longitudinale et proposent une technique originale, rapide et stable de discrétisation du tenseur des contraintes. Pour résoudre les équations, ils utilisent une méthode implicite aux différences finies associée à l'algorithme de Thomas. Les résultats obtenus sont utilisés comme référence pour délimiter les domaines de validité des modèles approchés proposés dans la littérature.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Abstract

The Authors study the established and non-established flows of liquid and of the air that it drags as well as the heat transfer between the air and the surface. They hypothesise that there are steady bidimensional laminar boundary layer in the liquid and in the gas. They consider that at the leading edge of the surface the longitudinal velocity of the liquid depends only of the normal co-ordinate and that the air is at rest far from the interface. A homotopic transformation allows them to reduce the interface to a parallel surface to the wall and to avoid the use of a variable step grid when they discretize the equations. They define the apparent viscosity of ostwaldian liquid by using the absolute value of the longitudinal velocity normal gradient and propose an original, fast and stable technique in order to discretize the stress tensor. To solve equations, they use an implicit finite difference method associated to the Thomas algorithm. Results are used as a reference to delimit the validity of the model proposed in the literature.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Processus thermique ; Convection forcée ; Fluide ostwaldien

Keywords: Mechanics fluid; Thermal processes; Forced convection; Ostwaldian fluid

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : sveralgk@yahoo.fr (S. Saouli), daguinet@gala.univ-perp.fr (M. Daguinet).

Nomenclature

C_f	coefficient de frottement, $= \frac{2\tau}{\rho \bar{u}^2}$
c_p	capacité calorifique massique à pression constante $\text{J}\cdot\text{kg}\cdot\text{K}^{-1}$
Fr	nombre de Froude, $= \frac{u_{\max}^2}{gh_0 \sin \theta}$
f	nombre adimensionnel, $= \frac{\mu_G h_0^{n-1}}{k u_{\max}^{n-1}}$
g	intensité du vecteur accélération de la pesanteur $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
h_0	épaisseur dimensionnelle du film liquide à l'entrée m
h_x	épaisseur dimensionnelle du film liquide à l'abscisse x m
i_{\max}	nombre maximal de nœuds dans le sens de l'écoulement
i, j	numéro des nœuds respectivement suivant χ et η
j_{\max}	nombre maximal de nœuds dans le sens perpendiculaire au sens de l'écoulement
k	indice de consistance du liquide .. $\text{kg}\cdot\text{s}^{n-2}\cdot\text{m}^{-1}$
L	longueur de la plaque m
Nu	nombre de Nusselt local, $= -\frac{L}{h_0 \Delta_l} \frac{\partial T}{\partial \eta}$
n	indice de comportement du liquide
O	origine du repère cartésien défini sur la Fig. 1
Pr_G	nombre de Prandtl dans la phase gazeuse, $= \frac{\mu_G c_p G}{\lambda_G}$
Pr_l	nombre de Prandtl dans la phase liquide, $= \frac{C_p k}{u_{\max}^{1-n} h_0^{n-1} \lambda_l}$
Re_l	nombre de Reynolds relatif au liquide, $= \frac{\rho u_{\max}^{2-n} h_0^n}{k}$
Re_l^*	nombre de Reynolds modifié relatif au liquide, $= (3/2)^{n-2} Re_l$
T	température adimensionnelle, $= \frac{t-t_\infty}{t_p-t_\infty}$
t	température dimensionnelle K
U	composante longitudinale adimensionnelle de la vitesse, $= \frac{u}{u_{\max}}$
u	composante longitudinale dimensionnelle de la vitesse $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
\bar{u}	vitesse moyenne du liquide, $= \frac{2}{3h_x} u_{\max} \cdot \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
u_{\max}	vitesse maximale à l'entrée $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
V	composante transversale adimensionnelle de la vitesse, $= \frac{v}{u_{\max}}$

v	composante transversale dimensionnelle de la vitesse $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
X	coordonnée adimensionnelle, $= \frac{x}{h_0 Re_l}$
x	coordonnée cartésienne dimensionnelle définie sur la Fig. 1 m
Y	coordonnée adimensionnelle, $= \frac{y}{h_0}$
y	coordonnée cartésienne dimensionnelle définie sur la Fig. 1 m

Lettres grecques

α	nombre adimensionnel, $= \frac{Fr}{Re_l}$
β	viscosité apparente adimensionnelle, $= \partial U / \partial \eta ^{n-1}$
β'	viscosité apparente du liquide, $= k \partial u / \partial y ^{n-1}$ $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$
Δ_l	épaisseur adimensionnelle du film liquide, $= \frac{h_x}{h_0}$
Δ_T	épaisseur adimensionnelle de la couche limite thermique
$\Delta \chi$	pas adimensionnel suivant la direction χ
$\Delta \eta$	pas adimensionnel suivant la direction η
η	ordonnée adimensionnelle, $= \frac{Y}{\Delta_l}$
γ	nombre adimensionnel, $= \frac{k \rho_l u_{\max}^{n-1}}{\mu_G \rho_G h_0^{n-1}}$
λ	conductivité thermique $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
μ	viscosité dynamique $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$
ρ	masse volumique $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
τ	tenseur des contraintes, $= k (\partial u / \partial y)^n$ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
θ	angle d'inclinaison de la plaque par rapport au plan horizontal rad
χ	abscisse adimensionnelle, $= X$
χ_e	distance d'entrée hydrodynamique adimensionnelle

Indices

e	relatif à l'entrée
G	relatif à la phase gazeuse
i	relatif à l'interface
l	relatif à la phase liquide
\max	relatif à une valeur maximale
p	relatif à la paroi
∞	loin de l'interface

1. Introduction

Les transferts de chaleur dans un film liquide en écoulement sur une paroi interviennent dans de nombreux phénomènes naturels et processus industriels [1–15]. Le cas d'un ruissellement sur une plaque plane inclinée est le plus étudié [2–7, 10, 11, 14, 15]. La plupart des travaux considèrent un

liquide newtonien [2–6]. Quelques-uns, cependant, considèrent un fluide oswaldien [7–15]. Dans ce dernier cas, les travaux théoriques ou numériques supposent généralement que le fluide est limité supérieurement par une surface libre [7–13].

A notre connaissance, seuls Narayana Murthy et Sarma [14] considèrent la présence d'une phase gazeuse au-dessus du film. Ces auteurs posent les hypothèses suivantes :

- (1) Le gaz est immobile loin de l'interface ;
- (2) L'épaisseur du film est suffisamment petite pour que l'on puisse confondre, au niveau de l'interface, les dérivées suivant les normales à celle-ci et à la paroi ;
- (3) Les écoulements du liquide et du gaz s'effectuent en couches limites laminaires, permanentes, bidimensionnelles ;
- (4) L'interface liquide–gaz est sans ondes ni tension superficielle et, à ce niveau, la tension de frottement du liquide sur le gaz est égale à celle du gaz sur le liquide ;
- (5) Les propriétés physiques des fluides sont constantes ;
- (6) Au niveau du bord d'attaque de la plaque inclinée, la composante normale de la vitesse est nulle et le profil de la composante longitudinale est parabolique, c'est-à-dire le liquide émerge en régime établi d'un conduit bidimensionnel ;
- (7) Le tenseur des contraintes dans le liquide est donné par la relation :

$$\tau = k \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \tag{1}$$

- (8) Au-dessus de la plaque, le profil de la composante longitudinale de la vitesse est, dans le film liquide, une demi-parabole dont le maximum se trouve sur l'interface et, dans le gaz, du type parabolique.

L'utilisation d'une méthode intégrale leur permet de ramener les équations aux dérivées partielles de départ à des équations différentielles qui sont ensuite résolues à l'aide du schéma de discrétisation d'ordre quatre de Runge–Kutta. Les profils des composantes longitudinales des vitesses dans le liquide et dans le gaz sont ainsi déterminés le long de la plaque.

Cette approche pose problème au voisinage du bord d'attaque de la plaque. En effet, à ce niveau, le maximum de la vitesse longitudinale se trouve au milieu du film. Il existe donc une zone d'entrée le long de laquelle ce maximum se déplace progressivement vers l'interface. Dans cette zone d'entrée, il existe dans le liquide une région où $\partial u / \partial y$ est négatif et, dans ce cas, le tenseur des contraintes donné par l'expression (1) n'est pas défini.

Afin d'éviter cette difficulté et d'être en mesure d'étudier l'écoulement et les transferts de chaleur dans la zone d'entrée, nous écrivons le tenseur des contraintes sous la forme proposée par Hady [12] et Fox et al. [13], à savoir

$$\tau = k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \beta' \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{2}$$

où $\beta' = k |\partial u / \partial y|^{n-1}$ est la viscosité apparente qui est déterminée à chaque station de calcul. De plus, nous proposons une technique numérique qui nous dispense d'imposer un profil suivant y aux composantes longitudinales des vitesses.

V. Narayana Murthy et P.K. Sarma ont également étudié le transfert de chaleur dans le liquide en supposant que la paroi est isotherme, portée à une température t_p et que l'air situé au-dessus est maintenu à la température t_∞

[15]. Ils postulent l'existence d'une couche limite thermique d'épaisseur δ_t située dans le liquide et à l'intérieur de laquelle le profil de température est de la forme

$$\frac{t - t_\infty}{t_p - t_\infty} = T = 1 - \Phi(x) \left(\frac{3y}{2\delta_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right)$$

où $\Phi(x)$ est égal à l'unité dans une zone d'entrée thermique et inconnu au-delà. Ils supposent que, sur la paroi $\partial^2 t / \partial y^2 = 0$ et qu'au niveau de la frontière extérieure de la couche limite thermique, $\partial t / \partial y = 0$. Les inconnues δ_t et $\Phi(x)$ sont déterminées en utilisant la méthode intégrale de Von Karman et les équations différentielles obtenues sont résolues à l'aide d'une technique de Runge–Kutta d'ordre 4.

2. Formulation mathématique du problème

Pour étudier l'écoulement, nous conservons l'ensemble des hypothèses de V. Narayana Murthy et P.K. Sarma, sauf que l'expression (1) est remplacée par (2) et que la dernière hypothèse est abandonnée. De plus, nous prenons en compte le couplage entre le transfert de chaleur dans l'air et celui dans le liquide.

Considérons donc un film liquide ostwaldien s'écoulant par gravité sur une surface plane, lisse, inclinée d'un angle θ par rapport au plan horizontal, de longueur L . En amont de la plaque, on suppose que le liquide sort, à une température t_∞ et en régime établi, d'un conduit défini par la plaque et une paroi supérieure située à la distance h_0 qui lui est parallèle. Au-dessus du film se trouve un gaz, en l'occurrence de l'air, au repos loin du film liquide qui, par suite du frottement, l'entraîne au voisinage de l'interface. La Fig. 1 présente un schéma du système.

La courbure de l'interface liquide-air invite à utiliser une transformation homotopique [16] qui permet le passage du système de coordonnées cartésiennes $O(x, y)$ à un autre $O(\chi, \eta)$ dans lequel l'interface correspond à la droite parallèle à l'axe $O\chi$ d'équation $\eta = 1$.

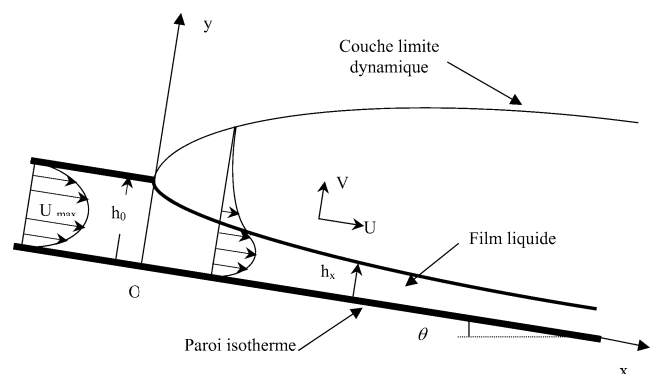


Fig. 1. Représentation schématique du système.

Fig. 1. Schematic representation of the system.

Le changement de coordonnées choisi est le suivant :

$$X = \chi \quad (3)$$

$$Y = \eta \Delta_l(\chi) \quad (4)$$

Les dérivées partielles dans le nouveau système de coordonnées s'expriment comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{\eta}{\Delta_l} \frac{d\Delta_l}{d\chi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{1}{\Delta_l} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{1}{\Delta_l^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (7)$$

Avec les notations définies dans la nomenclature, les équations de transfert s'écrivent, sous forme adimensionnelle :

Dans le liquide

Équation de continuité

$$\frac{\partial U_l}{\partial \chi} - \frac{\eta}{\Delta_l} \frac{d\Delta_l}{d\chi} \frac{\partial U_l}{\partial \eta} + \frac{Re_l}{\Delta_l} \frac{\partial V_l}{\partial \eta} = 0 \quad (8)$$

Équation du mouvement

$$U_l \frac{\partial U_l}{\partial \chi} - U_l \frac{\eta}{\Delta_l} \frac{d\Delta_l}{d\chi} \frac{\partial U_l}{\partial \eta} + \frac{Re_l}{\Delta_l} V_l \frac{\partial U_l}{\partial \eta} = \frac{Re_l}{Fr} + \frac{1}{\Delta_l^{n+1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\left| \frac{\partial U_l}{\partial \eta} \right|^{n-1} \frac{\partial U_l}{\partial \eta} \right) \quad (9)$$

Équation de la chaleur

$$U_l \frac{\partial T_l}{\partial \chi} - U_l \frac{\eta}{\Delta_l} \frac{d\Delta_l}{d\chi} \frac{\partial T_l}{\partial \eta} + \frac{Re_l}{\Delta_l} V_l \frac{\partial T_l}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr_l \Delta_l^2} \frac{\partial^2 T_l}{\partial \eta^2} \quad (10)$$

Dans le gaz

Équation de continuité

$$\frac{\partial U_G}{\partial \chi} - \frac{\eta}{\Delta_l} \frac{d\Delta_l}{d\chi} \frac{\partial U_G}{\partial \eta} + \frac{Re_l}{\Delta_l} \frac{\partial V_G}{\partial \eta} = 0 \quad (11)$$

Équation du mouvement

$$U_G \frac{\partial U_G}{\partial \chi} - U_G \frac{\eta}{\Delta_l} \frac{d\Delta_l}{d\chi} \frac{\partial U_G}{\partial \eta} + \frac{Re_l}{\Delta_l} V_G \frac{\partial U_G}{\partial \eta} = \frac{\gamma f^2}{\Delta_l^2} \frac{\partial^2 U_G}{\partial \eta^2} \quad (12)$$

Équation de la chaleur

$$U_G \frac{\partial T_G}{\partial \chi} - U_G \frac{\eta}{\Delta_l} \frac{d\Delta_l}{d\chi} \frac{\partial T_G}{\partial \eta} + \frac{Re_l}{\Delta_l} V_G \frac{\partial T_G}{\partial \eta} = \frac{\gamma f^2}{Pr_G \Delta_l} \frac{\partial^2 T_G}{\partial \eta^2} \quad (13)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

– A la paroi ($\eta = 0$, condition d'adhérence)

$$U_{l,p} = V_{l,p} = 0 \quad (14)$$

$$T_{l,p} = 1 \quad (15)$$

– A la frontière extérieure de la couche limite gazeuse ($\eta \rightarrow \infty$)

$$U_{G,\infty} = V_{G,\infty} = 0, \quad T_{G,\infty} = 0 \quad (16)$$

– A l'interface ($\eta = 1$), l'hypothèse de non-glissement des phases liquide et gazeuse l'une sur l'autre permet d'écrire :

$$U_l|_i = U_G|_i \quad (17)$$

– L'hypothèse selon laquelle l'interface est en équilibre thermodynamique local entraîne :

$$T_l|_i = T_G|_i \quad (18)$$

– La faible épaisseur du film liquide et la grande valeur du nombre de Reynolds du liquide conduisent à écrire la condition pour l'impulsion sous la forme :

$$\frac{1}{f \Delta_l^{n-1}} \left(\left| \frac{\partial U_l}{\partial \eta} \right|^{n-1} \frac{\partial U_l}{\partial \eta} \right) \Big|_i = \left(\frac{\partial U_G}{\partial \eta} \right) \Big|_i \quad (19)$$

– La continuité du flux de chaleur donne :

$$\frac{\lambda_l}{\lambda_G} \left(\frac{\partial T_l}{\partial \eta} \right) \Big|_i = \left(\frac{\partial T_G}{\partial \eta} \right) \Big|_i \quad (20)$$

– A l'entrée, $\chi = 0$

$$U_{l,e} = 4(\eta - \eta^2), \quad T_{l,e} = 0 \quad (21)$$

$$U_{G,e} = V_{G,e} = 0, \quad T_{G,e} = 0$$

A ces conditions, il faut ajouter, celle exprimant que l'épaisseur du film liquide satisfait l'équation de conservation du débit massique :

$$\Delta_l \int_0^1 U_l d\eta = \frac{2}{3} \quad (22)$$

Définissons sur la paroi les grandeurs adimensionnelles suivantes :

Le coefficient de frottement local :

$$Cf_p = \frac{9}{2Re_l \cdot Re_l^* \Delta_l^{n-2}} \left(\left| \frac{\partial U_l}{\partial \eta} \right|^{n-1} \frac{\partial U_l}{\partial \eta} \right) \Big|_p \quad (23)$$

Le nombre de Nusselt local :

$$Nu_p = - \frac{L}{h_0 \Delta_l} \left(\frac{\partial T_l}{\partial \eta} \right) \Big|_p \quad (24)$$

Introduisons, en outre, la viscosité apparente adimensionnelle :

$$\beta = \left| \frac{\partial U}{\partial \eta} \right|^{n-1} \quad (25)$$

3. Méthode de résolution numérique des équations de transfert

Le domaine continu est ramené à un domaine discret formé d'un réseau de rectangles contigus. Si i et j représentent l'abscisse et l'ordonnée d'un point M , on a :

$$\Delta\chi = \frac{L}{h_0 Re_l (i_{\max} - 1)} \quad \text{et} \quad \Delta\eta = \frac{1}{(j_{\max} - 1)} \quad (26)$$

où i_{\max} et j_{\max} sont les nombres de nœuds maximaux suivant les directions χ et η .

Nous utilisons une méthode implicite aux différences finies pour discrétiser les équations de transfert. Les dérivées premières suivant les sens de l'écoulement sont approchées par une différence finie progressive tandis que celles suivant la normale à la paroi sont centrées. Après réarrangement des équations discrétisées dans les deux phases et à l'interface, on obtient un système d'équations algébriques qu'on résout en faisant appel à la méthode d'élimination de Gauss combinée à des techniques d'itérations [17–20].

Généralement, dans les études numériques des écoulements ostwaldiens, le tenseur des contraintes est discrétisé globalement, la viscosité apparente étant estimée à chaque station de calcul. Ainsi, en utilisant une discrétisation centrée sur j , il vient (méthode 1) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\beta \frac{\partial U}{\partial\eta} \right]_j^{i+1} \\ &= \frac{1}{\Delta\eta^2} (\beta_{j+1/2}^{i+1} U_{j+1}^{i+1} - (\beta_{j+1/2}^{i+1} + \beta_{j-1/2}^{i+1}) U_j^{i+1} \\ & \quad + \beta_{j-1/2}^{i+1} U_{j-1}^{i+1}) + O(\Delta\eta^2) \end{aligned} \quad (27a)$$

Nous approchons $\beta_{j+1/2}^{i+1}$ par $(\beta_{j+1}^{i+1} + \beta_j^{i+1})/2$ et $\beta_{j-1/2}^{i+1}$ par $(\beta_j^{i+1} + \beta_{j-1}^{i+1})/2$.

La viscosité apparente étant fonction des coordonnées et des vitesses, son estimation génère des erreurs que l'on peut minimiser en resserrant le maillage au détriment du temps de calcul. Il est possible d'éviter cet inconvénient en remarquant [17] que

$$\frac{\partial}{\partial\eta} \left(\left| \frac{\partial U}{\partial\eta} \right|^{n-1} \frac{\partial U}{\partial\eta} \right) = n \cdot \beta \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}$$

Il vient alors (méthode 2) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\left| \frac{\partial U}{\partial\eta} \right|^{n-1} \frac{\partial U}{\partial\eta} \right)_j^{i+1} \\ &= n \cdot \beta_j^{i+1} \left[\frac{U_{j+1}^{i+1} - 2 \cdot U_j^{i+1} + U_{j-1}^{i+1}}{\Delta\eta^2} \right] + O(\Delta\eta^2) \end{aligned} \quad (27b)$$

Les erreurs de discrétisation inhérentes aux deux méthodes sont du même ordre [17].

Le Tableau 1 présente les variations du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement moyens à la paroi en fonction du nombre de points maximal dans la direction longitudinale. Pour des nombres de Reynolds et de Froud

Tableau 1

Comparaisons des nombres de Nusselt et des coefficients de frottement moyens en fonction du nombre maximal de points suivant la direction longitudinale

Tableau 1

Comparisons of average Nusselt and friction coefficients versus the stream-wise maximum number of points

$n = 0,4$	$Fr = 0,5$	i_{\max}	Nu_{moy}	Cf_{moy}
		2000	23,0503	3,49969
		2500	23,1097	3,50036
		3000	23,1498	3,50084
		3500	23,1787	3,50119
	$Fr = 0,01$	i_{\max}	Nu_{moy}	Cf_{moy}
		3000	19,628	19,8320
		3500	19,8869	19,8343
		4000	20,6688	19,8359
		4500	21,0397	19,8373
		5000	21,2129	19,8385
		5500	21,2366	19,8395
$n = 1,4$	$Fr = 0,5$	i_{\max}	Nu_{moy}	Cf_{moy}
		3000	22,061	6,74347
		3500	22,555	6,74416
		4000	22,836	6,74467
		4500	22,961	6,74510
	$Fr = 0,01$	i_{\max}	Nu_{moy}	Cf_{moy}
		3000	<i>diverge</i>	<i>diverge</i>
		3500	21,7755	120,542
		4000	21,9051	120,550
		4500	22,2888	120,557
		5000	22,3495	120,563
		5500	22,3639	120,567

fixes, nous constatons que, pour les fluides dilatants, les nombres de Nusselt moyens convergent plus lentement que les coefficients de frottement moyens. Entre $i_{\max} = 5000$ et $i_{\max} = 5500$, l'erreur relative maximale sur le nombre de Nusselt moyen (pour $Fr = 0,01$ et $n = 1,4$) est de l'ordre de 10^{-3} . Par suite, nous choisissons comme nombre de points maximal dans la direction longitudinale $i_{\max} = 5000$.

Nous avons comparé les résultats issus des deux méthodes de discrétisation du tenseur des contraintes dans les conditions suivantes : $\alpha = 0,1$ et $0,01$; $n = 0,4, 0,8, 1,0$ et $1,4$, sauf indication contraire, les pas d'espace sont $\Delta\chi = 5 \times 10^{-4}$ et $\Delta\eta = 1/300$.

Les calculs montrent [17] que les résultats sont les mêmes, sauf au voisinage immédiat de l'interface au niveau du bord d'entrée. C'est, en effet, dans cette zone que le tenseur des contraintes dépend le plus fortement des coordonnées et des vitesses. Dans cette zone, un petit écart, d'autant plus important que l'indice de comportement diffère de l'unité par valeurs supérieures et inférieures, apparaît. Celui-ci diminue quand on diminue les pas d'espace dans la méthode utilisant une discrétisation globale du tenseur des contraintes. Par conséquent, dans la suite, nous utilisons une discrétisation conforme à (27b).

4. Étude du mouvement et comparaison avec les travaux de V. Narayana Murthy et P.K. Sarma

Pour effectuer cette comparaison, nous utilisons la même adimensionnalisation et nous donnons aux paramètres adimensionnels les mêmes valeurs que ces auteurs. Les résultats suivants sont relatifs à $\alpha = 0,1$ et $0,01$; $n = 0,4, 0,8, 1,0$ et $1,4$; $\gamma = 1000, 100, f = 0,1$ et $0,01$ $\Delta\chi = 5 \times 10^{-4}$ et $\Delta\eta = 1/300$.

Les courbes de la Fig. 2, qui représentent les variations des épaisseurs adimensionnelles du film en fonction de l’abscisse adimensionnelle pour différentes valeurs de α , de n et pour $\gamma = 1000$, montrent, lorsque $\alpha = 0,01$, que les longueurs des zones d’entrée hydrodynamiques données par notre code de calcul et celles obtenues par V. Narayana Murthy et P.K. Sarma sont presque égales, sauf que ces derniers surestiment légèrement l’épaisseur du film liquide pour $n = 1,4$.

Pour $\alpha = 0,1$, on observe des écarts non négligeables entre les épaisseurs, surtout au voisinage de l’entrée, lesquels diminuent au fur et à mesure que l’on s’éloigne de celle-ci. En outre, les longueurs des zones d’entrée hydrodynamique données par notre code de calcul et celles trouvées par V. Narayana Murthy et P.K. Sarma ne coïncident plus. L’hypothèse de ces auteurs selon laquelle le profil de vitesse est semi-parabolique tout le long de la paroi, même à l’entrée, peut expliquer ces différences.

Sur la Fig. 3(a), nous représentons les variations des produits des coefficients de frottement par le nombre de Reynolds modifié en fonction de l’abscisse adimensionnelle. Là aussi, nous constatons des écarts entre les résultats de V. Narayana Murthy et P.K. Sarma et les nôtres, surtout au voisinage de l’entrée. Ces écarts sont plus importants pour les faibles valeurs de l’indice de comportement n . Pour les fluides dilatants, les profils trouvés par V. Narayana Murthy

et P.K. Sarma présentent des minima localisés au voisinage de la zone d’entrée, qui n’existent pas sur nos courbes. Nous attribuons l’existence de ces minima à des artefacts numériques car, lorsque nous augmentons nos pas d’espace, nous pouvons les faire apparaître. Par exemple, si nous prenons $\Delta\chi = 5 \times 10^{-3}$ et $\Delta\eta = 1/200$, la Fig. 3(b) montre que le profil du produit du coefficient de frottement par le nombre de Reynolds modifié est identique à celui trouvé par V. Narayana Murthy et P.K. Sarma pour $n = 1,4$. En outre, en partant de l’expression analytique du produit du coefficient de frottement par le nombre de Reynolds modifié qu’ils ont trouvée, on peut démontrer que cette fonction n’admet pas de minimum au voisinage de l’entrée pour $n = 1,4$ [17].

Les Figs. 4(a) et 4(b) représentent les variations des rapports entre les vitesses longitudinales et celles à l’interface en fonction de la coordonnée normale dans le film liquide et dans la phase gazeuse pour $\chi = 0,01$. Elles montrent que le maximum de la vitesse se trouve dans le liquide et non à l’interface comme l’ont supposé V. Narayana Murthy et P.K. Sarma pour $\chi \leq 0,01$ et que les vitesses longitudinales

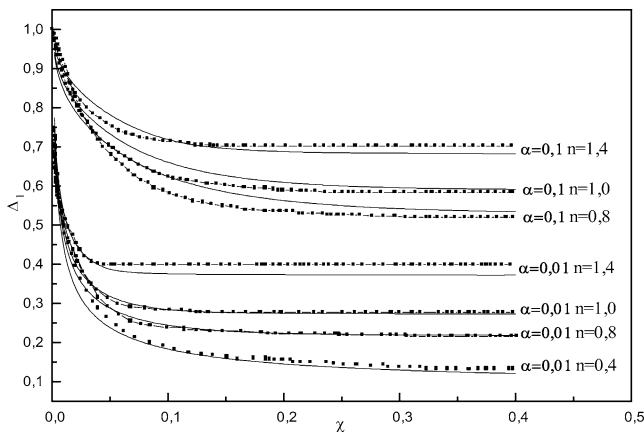
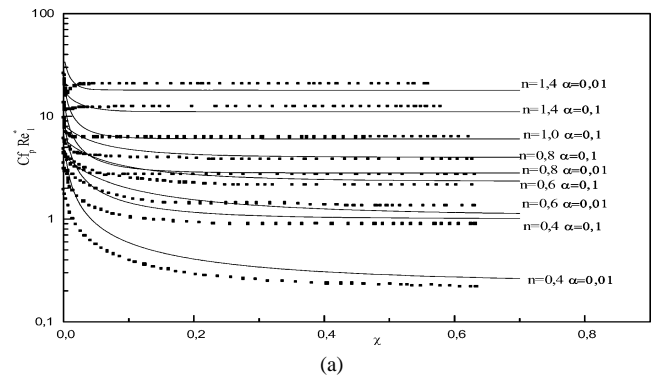
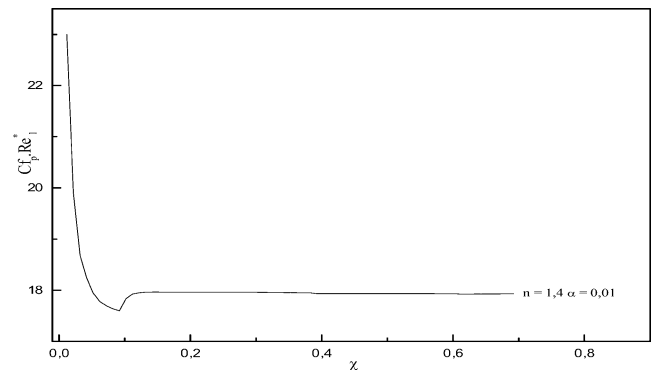


Fig. 2. Variations de l’épaisseur adimensionnelle du film en fonction de l’abscisse adimensionnelle pour $\gamma = 1000$ et pour différentes valeurs de α et n . — nos résultats, résultats de Narayana Murthy et Sarma [14].

Fig. 2. Variations of dimensionless film thickness versus the dimensionless streamwise co-ordinate for $\gamma = 1000$ and for different values of α and n . — our results; results of Narayana Murthy and Sarma [14].



(a)



(b)

Fig. 3. Variations du produit du coefficient de frottement à la paroi par le nombre de Reynolds modifié relatif au liquide en fonction de l’abscisse adimensionnelle pour différentes valeurs de α et n . — nos résultats, résultats de Narayana Murthy et Sarma [14] : (a) $\Delta\chi = 5 \times 10^{-4}$ et $\Delta\eta = 1/300$, (b) $\Delta\chi = 5 \times 10^{-3}$ et $\Delta\eta = 1/200$.

Fig. 3. Variations of the product of the shear stress at the wall by the modified Reynolds number relative to the liquid versus the dimensionless transversal co-ordinate and different values of α and n . — our results; results of Narayana Murthy and Sarma [14]: (a) $\Delta\chi = 5 \times 10^{-4}$ and $\Delta\eta = 1/300$; (b) $\Delta\chi = 5 \times 10^{-3}$ and $\Delta\eta = 1/200$.

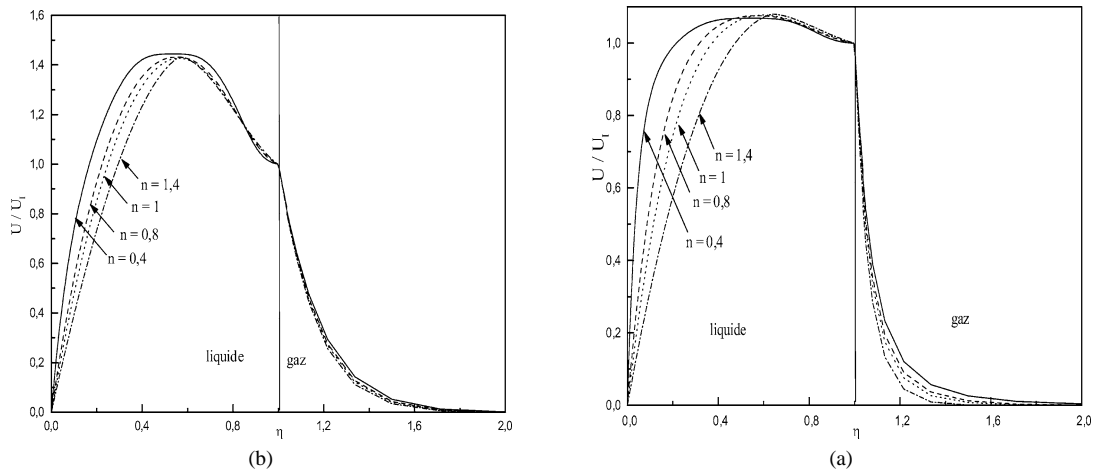


Fig. 4. Variations des rapports entre les vitesses longitudinales et celles à l'interface en fonction de la coordonnée normale pour $\chi = 0,01$ et différentes valeurs de n . (a) $f = 0,1$, $\gamma = 100$ et $\alpha = 0,1$; (b) $f = 0,01$, $\gamma = 1000$ et $\alpha = 0,01$.

Fig. 4. Variations of ratio between the longitudinal velocity and that on the interface versus to the normal co-ordinate for $\chi = 0.01$ for different values of n . (a) $f = 0.1$, $\gamma = 100$ and $\alpha = 0.1$; (b) $f = 0.01$, $\gamma = 1000$ and $\alpha = 0.01$.

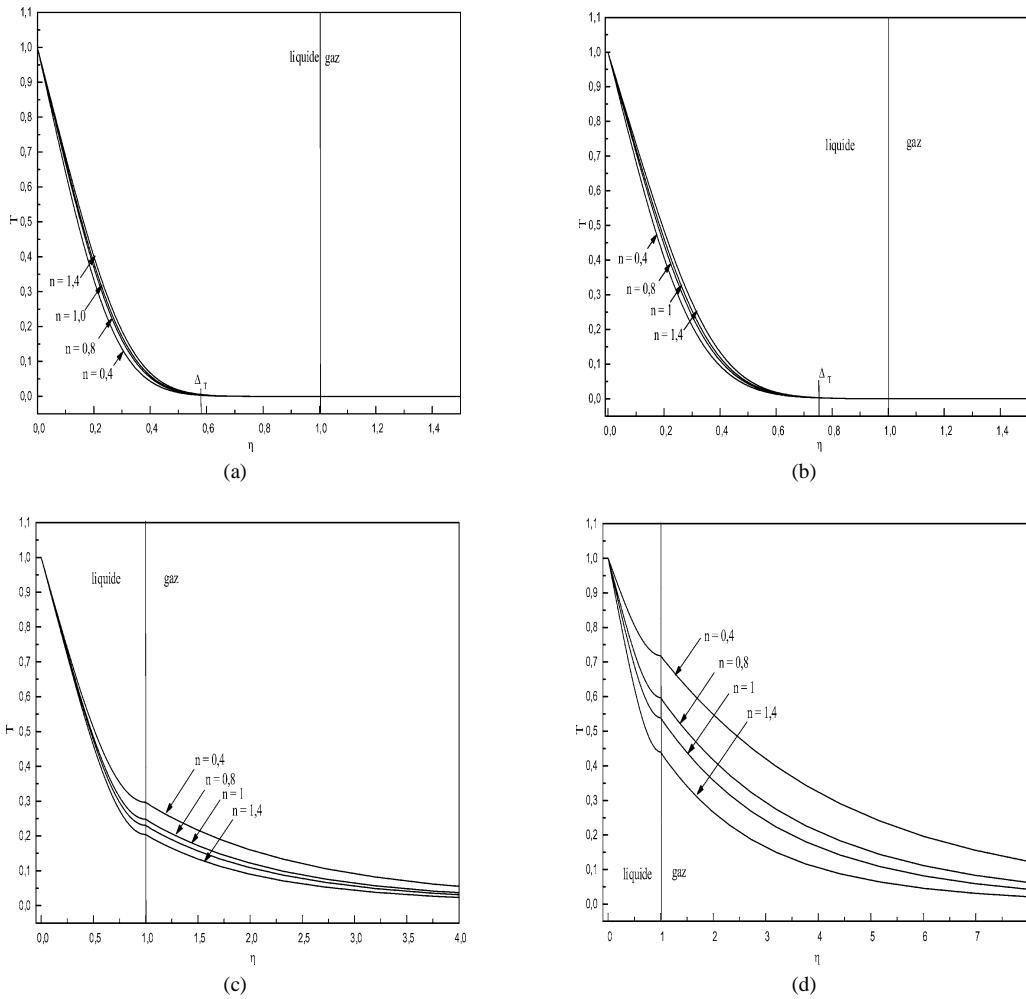


Fig. 5. Variations de la température adimensionnelle en fonction de l'ordonnée adimensionnelle pour $f = 0,1$, $\gamma = 1000$, deux valeurs de α et de χ et différentes valeurs de n : (a) $\alpha = 0,1$ et $\chi = 0,01$; (b) $\alpha = 0,01$ et $\chi = 0,01$; (c) $\alpha = 0,1$ et $\chi = 0,1$; (d) $\alpha = 0,01$ et $\chi = 0,1$.

Fig. 5. Variations of the dimensionless temperature versus the dimensionless normal co-ordinate for $f = 0.1$, $\gamma = 1000$, two values of α and χ and different values of n : (a) $\alpha = 0.1$ and $\chi = 0.01$; (b) $\alpha = 0.01$ and $\chi = 0.01$; (c) $\alpha = 0.1$ and $\chi = 0.1$; (d) $\alpha = 0.01$ and $\chi = 0.1$.

calculées sont sensibles aux variations de l'indice de comportement pour les faibles valeurs de α (Fig. 4(b), ce que ne trouvent pas ces auteurs (Fig. 4(d) de la référence [14]).

5. Étude du transfert de chaleur

Nous donnons aux paramètres adimensionnels les valeurs précédemment utilisées et nous posons arbitrairement $\lambda_l/\lambda_G = 10$.

La Fig. 5 représente les variations de la température T en fonction de l'ordonnée η pour deux valeurs de l'abscisse dimensionnelle χ et du paramètre α ainsi que pour plusieurs valeurs de l'indice de comportement du liquide. Au voisinage immédiat du bord d'entrée de la plaque ($\chi = 0,01$), la température est indépendante de l'ordonnée à partir d'une valeur égale à l'épaisseur de la couche limite thermique et inférieure à celle du film liquide. Pour une abscisse $\chi = 0,1$ (inférieure à la distance d'entrée hydrodynamique qui varie de 0,22 à 0,77 selon l'indice de comportement du liquide), l'épaisseur de la

couche limite thermique est supérieure à celle du film. Les températures dépendent peu de l'indice de comportement du fluide. Remarquons que, pour $\chi = 0,01$, les températures des fluides pseudoplastiques sont supérieures à celles des fluides dilatants alors que c'est l'inverse pour $\chi = 0,1$. Un changement semblable s'observe sur les courbes de la Fig. 6 représentant les variations du nombre de Nusselt calculé sur la paroi, en fonction de l'abscisse χ .

6. Conclusion

Le modèle proposé et la technique de résolution utilisée permettent d'étudier le transfert de chaleur entre la paroi, un film liquide mince ostwaldien et l'air situé au-dessus, aussi bien lorsque l'écoulement du film est établi, c'est-à-dire assez loin du bord d'attaque de la paroi, que lorsque cet écoulement est non établi, c'est-à-dire dans la première partie de la paroi. Le modèle suppose que le film s'écoule sans ondes, que les propriétés physiques sont constantes et utilise les approximations de la couche limite. En régime non établi, les phénomènes dépendent des conditions d'entrée et l'influence de ces dernières sur les premiers peut être étudiée grâce à la formulation de la viscosité apparente du liquide en fonction de la valeur absolue du gradient normal de la vitesse longitudinale. Toutefois, le cas où la valeur de cette vitesse à l'entrée ne dépend pas de la coordonnée normale est exclu car le démarrage des calculs utilise une valeur finie de la viscosité apparente du fluide au niveau du bord d'entrée. Les calculs montrent que les résultats de V. Narayana Murthy et P.K. Sarma concernant l'écoulement du film en régime établi sont satisfaisants.

Abridged English version

The authors study numerically an established and non-established flow, and heat transfer of an ostwaldian liquid falling along an inclined plane surface taking account of the air that it drags.

They set the following assumptions: at the leading edge, an established flow of liquid exits out of a canal delimited by the plate and a superior wall that is parallel to it; there are steady bidimensional boundary layers in the liquid and the gas; the physical properties are constant; there are neither waves nor superficial stress on the liquid-gas interface.

The authors use an homotopic transformation which allows them to reduce the interface to a parallel surface to the wall and to avoid the use of a variable step grid when they discretize the equations. They define the apparent viscosity of ostwaldian liquid by using the absolute value of the longitudinal velocity normal gradient and propose an original, fast and stable technique in order to discretize the stress tensor. To solve the equations, they use an implicit finite difference method associated to the Thomas algorithm.

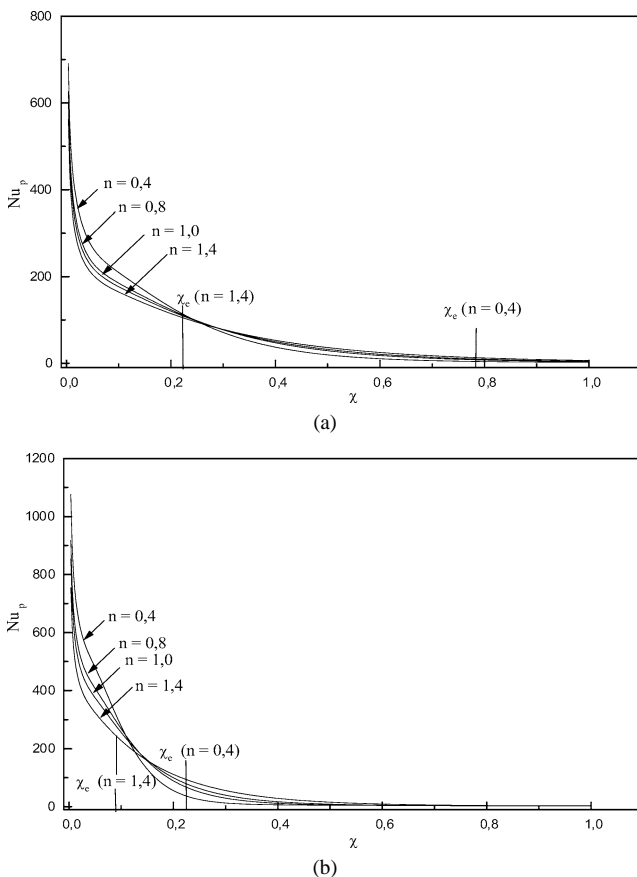


Fig. 6. Variations du nombre de Nusselt sur la paroi en fonction de l'abscisse adimensionnelle pour $f = 0,1$, $\gamma = 1000$ et différentes valeurs de n : (a) $\alpha = 0,1$, (b) $\alpha = 0,01$.

Fig. 6. Variations of the Nusselt number at the wall versus the dimensionless transversal co-ordinate for $f = 0,1$, $\gamma = 1000$ and different values of n : (a) $\alpha = 0,1$, (b) $\alpha = 0,01$.

In order to check the reliability of their calculation code, the authors compared their results with those of V. Narayana Murthy and P.K. Sarma and showed that the numerical model of the latter presents some insufficiencies, especially at the leading edge and for pseudo-plastic fluids.

The results are related to a power law index equal to 0.4, 0.8, 1 and 1.4 and to Froude versus Reynolds number ratios taken equal to 0.01 and 0.1. The authors show that the transversal co-ordinate for which the longitudinal velocity is maximal is not always situated at the interface and is a function of power law index. When the latter varies from 0.4 to 1.0 the longitudinal velocity maxima and temperatures increase for a fixed position and the effects of entrance damp out. When the fluid is power law index is equal to 1.4, the entrance length is short. The power law index influences temperature values but has a little influence on the temperature profiles versus the normal co-ordinate. When the power law index increases, the temperature of the interface comes closer to wall-temperature because the thickness of the film tends to zero. Near the leading edge, the values of Nusselt numbers related to the pseudo-plastic fluid are larger than those of the dilatant fluid. From a certain value of the longitudinal co-ordinate, the inverse phenomenon is observed. Finally they note that, when the thermal regime is established, the Nusselt numbers hardly depend on the power law index.

Références

- [1] W. Nusselt, Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes, *Z. Ver. Dt. Ing.* 60 (1916) 541–546, 568–575.
- [2] A.E. Duckler, Characterization effects and modeling of the wavy gas–liquid interface, *Heat Mass Transfer* 6 (1972) 207–234.
- [3] B. Spindler, Stabilité linéaire des films liquides avec changement de phase à l'interface, Thèse de Docteur Ingénieur, U.S. M et I.N. P Grenoble, France, 1980.
- [4] V.G. Levitch, *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
- [5] P.L. Kapitza, Waves Flow in Thin Layers of Viscous Fluids, in: *Collected Papers of P. L. Kapitza*, McMillan, New York, 1964.
- [6] M. Hounkanlin, Contribution à l'étude des écoulements de films liquides, Application aux phénomènes de transferts aux interfaces, Thèse de Doctorat d'état, Université de Poitiers, France, 1987.
- [7] G. Astaria, G. Marrucci, G. Palumbo, Non-newtonian gravity flow along inclined plane surfaces, *Ind. Engrg. Chem. Fundam.* 3 (1964) 333–339.
- [8] H. Chen-chi, A simple solution of boundary layer flow of power law fluids past a semi infinite flat plate, *AIChE J.* 15 (1969) 367–370.
- [9] A. Acrivos, M.J. Shah, E.E. Petersen, Momentum and heat transfer in laminar boundary layer flows of non-newtonian fluids past external surfaces, *AIChE J.* 6 (1960) 312–317.
- [10] R. Li, Hydrodynamic entrance lengths of non-newtonian laminar falling films, *Canad. J. Chem. Engrg.* 69 (1991) 383–385.
- [11] D. Heitz, Contribution à l'étude de la région d'entrée de films de liquides newtonien et non newtonien, Rapport de D.E. A, Université de Poitiers, France, 1994.
- [12] F.M. Hady, Mixed convection boundary layer Flow of non-newtonian fluids on a horizontal plate, *Appl. Math. Comput.* 68 (1995) 105–112.
- [13] V.G. Fox, L.E. Erickson, L.T. Fan, The laminar boundary layer on a moving continuous flat sheet immersed in a non-newtonian fluid, *AIChE J.* 15 (1969) 327–333.
- [14] V. Narayana Murthy, P.K. Sarma, Dynamics of developing laminar non newtonian falling liquid films with free surface, *J. Appl. Mech.* 45 (1978) 19–25.
- [15] V. Narayana Murthy, P.K. Sarma, Heat transfer to non-newtonian laminar falling liquid films with smooth wave free gas–liquid interface, *Internat. J. Multiphase Flow* 4 (1977) 413–425.
- [16] W. Mangler, Zusammenhang zwischen ebenen und rotations symmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten, *Z. Angew. Math. Mech.* (1948) 97.
- [17] A. Benkhalel, Étude numérique des transferts de chaleur entre l'air et un film ostwaldien ruisselant en régime laminaire permanent sur une surface inclinée isotherme, Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, 2001.
- [18] M. Boumahrat, A. Gourdin, Méthodes numériques appliquées, *Technique et Documentation*, Paris, 1983.
- [19] D. Euvrad, Résolution Numérique des Équations aux Dérivées Partielles, Masson, Paris, 1990.
- [20] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, McGraw-Hill, New York, 1980.